概均質ベクトル空間の保型超関数と付随するL関数 (保型形式・保型表現およびそれに伴うL函数と周期の研究)

佐藤, 文広; 田村, 敬太

数理解析研究所講究録
第 1715 巻 2010 年 52-63

概均質ベクトル空間の保型超関数と付随する L 関数

佐藤文広, 田村敬太

立教大学・理学部

序

このノートでは, Suzuki [12] における $(GL(n), Sym(n))$ の保型超関数とそれに付随する L 関数を, 一般の簡約正則概均質ベクトル空間に拡張することを試みる. Suzuki [12] の動機としては, Arakawa [1] があげられる. この論文で Arakawa は, 実解析的 Siegel Eisenstein 級数の Koecher-Maass ゼータ関数の関数等式を, 概均質ベクトル空間 $(GL(n), Sym(n))$ の局所関数等式と Fourier 係数の具体的表示から得られる性質を組み合わせて証明している. これは, H. Maass が講義録 [5] の最終節で提起した問題への一定の解答である. Suzuki は [12] で, この Arakawa の証明において Fourier 係数の具体的な性質を利用する部分を, 一種の保型性（一種の和公式）が示されていると捉え, 保型超関数の概念を定義するとともに, 関数等式の証明を概均質ベクトル空間の視点から整理した.

では, Suzuki のアイディアを正則 Siegel 保型形式の Koecher-Maass ゼータ関数を例にとって説明しよう. $\mathcal{H}$ を次数 n の Siegel 上半平面とし, $\Gamma = Sp_n(\mathbb{Z})$ を Siegel モジュラー群だとする. 通常のように, 群 Γ は $\mathcal{H}$ に

$$\gamma \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \quad \left(Z \in \mathcal{H},\ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma \right)$$

によって作用する. n 次の半整数対称行列の集合を $Sym_n^*(\mathbb{Z})$ で表す. $F(Z)$ を重さ k の正則 Siegel 保型形式とし, その Fourier 展開を

$$F(Z) = \sum_{T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})_{\geq 0}} a(T) \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ))$$

とする. このとき, F の Koecher-Maass ゼータ関数は

$$\xi(F,s) = \sum_{T \in GL_n(\mathbb{Z}) \backslash Sym_n^*(\mathbb{Z})_{>0}} \frac{a(T)/\sharp(O(T)_{\mathbb{Z}})}{(\det T)^s}$$

で定義され, 全 s 平面に有理型関数として解析接続されるとともに, 関数等式

$$\hat{\xi}(F,k-s)=(-1)^{kn/2}\hat{\xi}(F,s),\quad \hat{\xi}(F,s)=\xi(F,s)\times(2\pi)^{-ns}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(s-(i-1)/2)$$

を満たす. この関数等式の標準的な証明法は, 積分表示

$$\hat{\xi}(F,s)=(\text{constant})\times\int_{GL(n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{P}_n}\det Y^{s-\frac{n+1}{2}}F^*(\sqrt{-1}Y)\,dY$$

に基づいている. ここで $\mathcal{P}_n$ は n 次の実正定値対称行列の全体を表しており, $F^*(Z)$ は

$$F^*(Z)=\sum_{T>0}a(T)\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ))$$

で与えられる F の Fourier 展開の部分級数である. さて, Suzuki のアイディアは, 上の積分表示のように $F(Z)$ の "虚軸" への制限を用いるのではなく, "実軸" への境界値

$$\lim_{Y\to+0}F(X+\sqrt{-1}Y)=\sum_{T}a(T)\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TX))\quad(X\in Sym_n(\mathbb{R}))\tag{1}$$

を利用することである. ここで注意すべきは, 右辺の Fourier 級数は絶対収束しないため $Sym_n(\mathbb{R})$ 上の超関数として理解しなければならないことである. ここでは, $\mathcal{F}f(T)$ で f の Fourier 変換を表すこととして, (1) の右辺を

$$\mathcal{S}(Sym_n(\mathbb{R}))\ni f(X)\longmapsto\sum_{T}a(T)\mathcal{F}f(T)\in\mathbb{C},\tag{2}$$

によって定義される (緩増加) 超関数と理解することにする. ここで, 記号として

$$J(X)=|\det X|^{k-n-1},\quad {}^{\phi}f(X)=f(-X^{-1}),$$
$$X\in\Omega_{\mathbb{R}}:=\{X\in Sym_n(\mathbb{R})\mid\det X\neq0\}$$

を導入すると, $\begin{pmatrix}0_n & -1_n\\ 1_n & 0_n\end{pmatrix}\in\Gamma$ に対する F の保型性は

$$\sum_{T}a(T)\mathcal{F}f(T)=\sum_{T}a(T)\mathcal{F}(J\cdot{}^{\phi}f)(T)\quad(f\in C_0^{\infty}(\Omega_{\mathbb{R}}))\tag{3}$$

と表現することができる. Suzuki は一般に, (2) のような Fourier 級数 (ただし, T は半正定値に限られない) で与えられる $Sym_n(\mathbb{R})$ 上の超関数が

(i) $a({}^tUTU) = a(T) \quad (U \in GL_n(\mathbb{Z}))$,

(ii) ある定数 $e > 0$ に対し $a(T) = O(|\det T|^e)$,

(iii) 変換公式 (3) がすべての $f \in C_0^\infty(\Omega_\mathbb{R})$ に対して成り立つ

という 3 条件を満たすとき, (重さ k の) 保型超関数 ([12] の用語では "distribution with automorphy") と呼び, 付随する L 関数

$$\xi_i(\{a(T)\}, s) = \sum_{\substack{T \in GL_n(\mathbb{Z}) \backslash Sym_n^*(\mathbb{Z}) \\ \operatorname{sgn} T = (i, n-i)}} \frac{\mu(T) a(T)}{|\det T|^s}, \quad \mu(T) = T \text{ の類の Mass}$$

が関数等式を満たすことを, $|\det T|^s$ が満たす局所関数等式を利用して証明した.

以下では, この Suzuki の理論を簡約正則概均質ベクトル空間に一般化する. この理論においても通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論と同じように, 微分作用素を用いて変換公式への特異集合に属す点の寄与を消去しなければ, 一般論として関数等式を示すことはできない. そのため, 開軌道上の不変微分作用素の環が可換となるようなクラスの概均質ベクトル空間に対して理論が展開される. このようなクラスに属する概均質ベクトル空間としては, いわゆる可換放物型の概均質ベクトル空間がある.

本稿の主要部分は田村の修士論文 [13] によるものである.

1 保型超関数とその L 関数

(G, ρ, V) を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で定義された概均質ベクトル空間で, 条件

(A) G は簡約可能代数群,

(B) 特異集合 S は $\mathbb{Q}$ 上既約な超曲面

を満たすとする. このとき, ρ の反傾表現 ρ^* も概均質ベクトル空間 (G, ρ^*, V^*) を与え, その特異集合 S^* も $\mathbb{Q}$ 上既約な超曲面となる. $P(x)$, $P^*(y)$ を, それぞれ, S, S^* を定義する $\mathbb{Q}$ 上既約な多項式とする. P, P^* は定数倍を除いて一意的に定まり, 相対不変式となっている. すなわち, G の $\mathbb{Q}$-有理指標 χ, χ^* があり,

$$P(\rho(g)x) = \chi(g) P(x), \quad P^*(\rho^*(g)y) = \chi(g)^* P^*(y)$$

が成り立つ. 実は, $\chi^*(g) = \chi(g)^{-1}$ である. また, $n = \dim V$, $d = \deg P = \deg P^*$ とおく.

$\Omega = V \setminus S$, $\Omega^* = V^* \setminus S^*$ とおくと, これらは, 概均質ベクトル空間の定義により, G の Zariski-開軌道となっている. この開軌道の実点の集合 $\Omega_{\mathbb{R}}$, $\Omega^*_{\mathbb{R}}$ の連結成分への分解を

$$\Omega_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \Omega_i, \quad \Omega^*_{\mathbb{R}} = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Omega^*_j$$

とする. G^+ で実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の単位元を含む連結成分とすると, Ω_i, Ω^*_j は G^+-軌道となっている. 有理写像 $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega^*$ を

$$\phi(x) = \mathrm{grad}(\log P(x)) \tag{4}$$

によって定義すると, 条件 (A), (B) により (G, ρ, V) は正則概均質ベクトル空間であり ([3, Theorem 2.28]), ϕ は $\mathbb{Q}$ 上定義された G-同変な双正則射となっている. 実開軌道の番号付けを $\phi(\Omega_i) = \Omega^*_i$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ が成り立つようにしておく.

急減少関数 $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^* \in \mathcal{S}(V^*_{\mathbb{R}})$ に対し, 各実開軌道に対応した局所ゼータ関数を

$$\Phi_i(f; s) = \int_{\Omega_i} |P(x)|^s f(x)\, dx, \quad \Phi^*_i(f^*; s) = \int_{\Omega^*_i} |P^*(y)|^s f^*(y)\, dy$$

と $\Re(s) > 0$ で絶対収束する積分で定義する. まとめて,

$$\Phi(f; s) = \begin{pmatrix} \Phi_1(f; s) \\ \vdots \\ \Phi_\nu(f; s) \end{pmatrix}, \quad \Phi^*(f^*; s) = \begin{pmatrix} \Phi^*_1(f^*; s) \\ \vdots \\ \Phi^*_\nu(f^*; s) \end{pmatrix}$$

と列ベクトル表示しておく. $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ の Fourier 変換, $f^* \in \mathcal{S}(V^*_{\mathbb{R}})$ の (逆) Fourier 変換を

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(x)\mathbf{e}[-\langle x, y\rangle]\, dx, \quad \mathcal{F}^*f^*(x) = \int_{V^*_{\mathbb{R}}} f^*(y)\mathbf{e}[\langle x, y\rangle]\, dy,$$

と定義する. ここで, $\mathbf{e}[t] = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ とおいた. 概均質ベクトル空間の理論の基本定理は, 次の局所関数等式が成り立つという主張である.

定理 1 局所ゼータ関数 $\Phi(f : s)$ $(f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$, $\Phi^*(f^*; s)$ $(f^* \in \mathcal{S}(V^*_{\mathbb{R}}))$ は s の有理型関数として複素平面 $\mathbb{C}$ 全体に解析接続され, 関数等式

$$\Phi(\mathcal{F}^*f^* : s) = \gamma(s)\Phi^*(f^*; -\frac{n}{d} - s), \quad \Phi^*(\mathcal{F}f : s) = \gamma^*(s)\Phi(f; -\frac{n}{d} - s)$$

を満たす. ここで, $\gamma(s)$, $\gamma^*(s)$ はガンマ関数, 指数関数を用いて表すことができる f, f^* と無関係な有理型関数である.

ここで,

$$\gamma^*(s)\gamma\left(-\frac{n}{d}-s\right)=I_\nu\ (\nu\ \text{次単位行列}) \tag{5}$$

であることに注意しておく.

L, L^* を, それぞれ, $V_{\mathbb{Q}}$, $V_{\mathbb{Q}}^*$ 上の格子とする. ただし, L^* が L の双対格子であるとは仮定しない. 格子 L, L^* 上の高々多項式増大度の関数 $\alpha : L \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta : L^* \longrightarrow \mathbb{C}$ を考える. 多項式増大度とは, ある正定数 c_1, c_2, c_1^*, c_2^* を適当に取れば,

$$|\alpha(x)| < c_1(1+||x||^2)^{c_2}, \quad |\beta(y)| < c_1^*(1+||y||^2)^{c_2^*}.$$

となることと理解する. このとき, $V_{\mathbb{R}}$, $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の緩増加超関数 T_β, T_α^* を

$$T_\beta(f)=\sum_{y\in L^*}\beta(y)\mathcal{F}f(y) \quad (f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})),$$
$$T_\alpha^*(f^*)=\sum_{x\in L}\alpha(x)\mathcal{F}^*f^*(x) \quad (f^*\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*))$$

によって定義することができる.

定義 1 $k, \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu \in \mathbb{C}$ を複素定数とし,

$$J(x)=\sigma_i\,|P(x)|^{k-2n/d} \quad (x\in\Omega_i)$$

で定まる $\Omega_{\mathbb{R}}$ 上の関数 $J(x)$ を考える. 緩増加超関数 T_α^*, T_β は, 以下の 3 条件を満たすとき, (G,ρ,V), (G,ρ^*,V^*) 上の**保型因子** $J(x)$ **を持つ保型超関数**といわれる:

(i) $G_{\mathbb{Q}}\cap G^+$ の数論的部分群 Γ で L, L^* が, それぞれ, $\rho(\Gamma)$, $\rho^*(\Gamma)$ の作用で閉じており, α は $\rho(\Gamma)$-不変, β は $\rho^*(\Gamma)$-不変である.

(ii) ある正定数 r に対し

$$\alpha(x)=O(|P(x)|^r) \ \ (x\in L\cap\Omega), \quad \beta(y)=O(|P^*(y)|^r) \ \ (y\in L^*\cap\Omega^*)$$

が成り立つ.

(iii) ${}^{\phi}f^*(x)=f^*(\phi(x)) \quad (x\in\Omega_{\mathbb{R}})$ とおくと, 変換公式 $T_\alpha^*(f^*)=T_\beta(J\cdot{}^{\phi}f^*)$, すなわち,

$$\sum_{x\in L}\alpha(x)\mathcal{F}^*f^*(x)=\sum_{y\in L^*}\beta(y)\mathcal{F}(J\cdot{}^{\phi}f^*)(y) \tag{6}$$

が, 任意の $f^*\in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ に対して成り立つ.

保型超関数に対して L-関数を定義するために, 概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) にさらに次の仮定を課す.

(C) 任意の $x \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対し, 群 G_x° は自明でない $\mathbb{Q}$-有理指標を持たない. ただし, G_x° は x における G の等方部分群の (Zariski 位相に関する) 単位元連結成分を表わす.

この仮定の下で, 群 $G_x^+ := G^+ \cap G_x^\circ$ はユニモジュラーな Lie 群となり, その Haar 測度 $d\mu_x$ を積分公式

$$\int_{G^+} F(g)\,dg = \int_{G^+/G_x^+} \frac{d(\rho(\dot{g})x)}{|P(\rho(\dot{g})x)|^{n/d}} \int_{G_x^+} F(\rho(\det gh)x)\,d\mu_x(h),$$

が成り立つように正規化する. ここで dg はあらかじめ固定しておいた G^+ の Haar 測度である.

さて, Γ を保型超関数 T_α^*, T_β に対し定義 1 の条件 (i) を満たす数論的部分群で G^+ に含まれるものとし, $\Gamma_x = \Gamma \cap G_x^+$ $(x \in \Omega_{\mathbb{Q}})$ とおく. このとき, 仮定 (C) により, 基本領域の体積

$$\mu(x) = \int_{G_x^+/\Gamma_x} d\mu_x \quad (x \in \Omega_{\mathbb{Q}})$$

は有限となる. 仮定 (A), (B) のもとで, 仮定 (C) は双対概均質ベクトル空間 (G, ρ^*, V^*) についても成立し, $y \in \Omega_{\mathbb{Q}}^*$ に対して $\mu(y)$ が同様にして定義できる. この $\mu(x)$, $\mu(y)$ を用いて保型超関数 T_α^*, T_β に付随する L 関数が

$$\xi_i(\alpha, s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap \Omega_i} \alpha(x)\mu(x)\,|P(x)|^{-s},$$
$$\xi_i^*(\beta, s) = \sum_{y \in \Gamma \backslash L^* \cap \Omega_i^*} \beta(y)\mu(y)\,|P^*(y)|^{-s}$$

と定義される. 定義 1 の条件 (ii) と概均質ベクトル空間のゼータ関数の収束定理 ([6, Theorem 1.1]) により, L 関数 $\xi_i(\alpha, s)$, $\xi_i^*(\beta, s)$ は $\Re(s)$ が十分大きいとき絶対収束する. このように L 関数は実開軌道 Ω_i, Ω_i^* に対応して定義されるが, これらを成分とした行ベクトルを

$$\xi(\alpha, s) = (\xi_1(\alpha, s), \ldots, \xi_\nu(\alpha, s)), \quad \xi^*(\beta, s) = (\xi_1^*(\beta, s), \ldots, \xi_\nu^*(\beta, s))$$

とおく.

次の補題は, いわゆる, unfolding によって容易に得られる.

補題 1 $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$, $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ に対して, ゼータ積分

$$Z(\alpha, f; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in L \cap \Omega} \alpha(x) f(\rho(g)x)\, dg,$$
$$Z^*(\beta, f^*; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi^*(g)^s \sum_{y \in L^* \cap \Omega^*} \beta(y) f^*(\rho^*(g)y)\, dg$$

は $\Re(s)$ が十分大きいとき絶対収束して正則関数を定め, さらに次の等式が成り立つ:

$$Z(\alpha, f^*; s) = \xi(\alpha, s) \cdot \Phi(f; s - n/d), \quad Z^*(\beta, f^*; s) = \xi^*(\beta, s) \cdot \Phi^*(f^*; s - n/d).$$

ここで, 等式の右辺は L 関数からなる行ベクトルと局所ゼータ関数からなる列ベクトルの積である.

L 関数の関数等式と解析接続は, 補題 1 の積分表示と変換公式を用いて, 通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論（例えば, [3], [11] を見よ）と同様に示されるが, 一般論としては, 特異集合 S, S^* に含まれる格子点の変換公式への寄与の計算が難しく, 次の補題のように, そのフーリエ変換が特異軌道上で消える特殊な試験関数を用いる必要がある.

補題 2 $f^* \in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ が

$$\mathcal{F}^* f^*|_{S_{\mathbb{R}}} \equiv 0, \quad \mathcal{F}(J \cdot {}^\phi f^*)|_{S_{\mathbb{R}}^*} \equiv 0 \tag{7}$$

を満たすとき, $Z(\alpha, \mathcal{F}^* f^*; s)$, $Z^*(\beta, \mathcal{F}(J \cdot {}^\phi f^*); s)$ は s の整関数に解析接続され, 関数等式

$$Z(\alpha, \mathcal{F} f^*; s) = Z^*(\beta, \mathcal{F}(J \cdot {}^\phi f^*); k - s)$$

が成り立つ.

この補題は, 通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論において Poisson の和公式を利用するところを保型超関数が満たす変換公式 (6) を用いれば, まったく同様に証明される.

次に, 補題 2 の条件 (7) を満たす関数 $f^* \in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ を構成する. このような関数の構成には,

(D) Ω_i^* $(i = 1, \ldots, \nu)$ 上の G^+-不変線形微分作用素の環は可換である

という仮定を必要とする. この仮定は, 例えば, (G, ρ, V) がいわゆる可換放物型の概均質ベクトル空間などでは成立する.

$P^*(\partial_x)$, $P(\partial_y)$ を, それぞれ, 定数係数の線形微分作用素で

$$P^*(\partial_x)\exp(\langle x,y\rangle) = P^*(y)\exp(\langle x,y\rangle), \quad P(\partial_y)\exp(\langle x,y\rangle) = P(x)\exp(\langle x,y\rangle)$$

を満たすものとする. このとき,

$$P^*(\partial_x)P(x)^{s+1} = b(s)P(x)^s$$

を満たす s の多項式 $b(s)$ が存在し, 概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の b-関数といわれる. 一般に $\Omega_{\mathbb{R}}$ 上の微分作用素 D に対し, $\Omega_{\mathbb{R}}^*$ 上の微分作用素 ${}^{\phi}D$ を

$${}^{\phi}Df^*(y) = D({}^{\phi}f^*)(\phi^{-1}(y))$$

によって定義する. D が G^+-不変ならば, ${}^{\phi}D$ も G^+-不変である.

補題 3 (i) 微分作用素 M_1, M_2 を

$$M_1 = P(\partial_y)P^*(y), \quad M_2 = {}^{\phi}\big(J(x)^{-1}P^*(\partial_x)P(x)J(x)\big)$$

と定義すると, M_1, M_2 は $\Omega_{\mathbb{R}}^*$ 上の G^+-不変線形微分作用素である.
(ii) $f_0^* \in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ に対し, 関数 $M_1M_2f_0^*(y)$ は条件 (7) を満たす.
(iii) $f_0^* \in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ に対し,

$$\Phi_i^*(M_1M_2f_0^*;-s) = (-1)^d b(s-n/d)b(s-k-1)\Phi_i^*(f_0^*;-s)$$

が成り立つ.

以上の準備のもとで, L 関数の関数等式が通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合と類似の方法で証明される.

定理 2 L 関数 $\xi_i(\alpha,s), \xi_j^*(\beta,s)$ $(1\le i,j\le \nu)$ は s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 上に解析接続され, σ を保型因子 $J(x)$ の定義に現れた定数 σ_i を対角成分とする対角行列, すなわち,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_\nu \end{pmatrix}$$

とすると, 関数等式

$$\xi(\alpha,s)\gamma(s-n/d) = \xi^*(\beta,k-s)\gamma^*(k-n/d-s)\sigma$$

が成り立つ. ここで, $\gamma(s)$, $\gamma^*(s)$ は定理 1 の局所関数等式に現れたガンマ行列である.

L 関数の極とそこにおける主要部を決定することは, 一般論としては困難である. しかし, 概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合に極の位置は b-関数の零点によって統制されることの類似として, 次の結果を得ることができる.

定理 3 整数 $m \geq 0$ を十分大きく取れば, L 関数 $\xi_1(\alpha, s), \ldots, \xi_\nu(\alpha, s), \xi_1^*(\beta, s), \ldots, \xi_\nu^*(\beta, s)$ に

$$b(s-k-1)\prod_{r=0}^{m} b(s-n/d-r)$$

をかけたものは整関数である. とくに, L 関数の極は有限個しかない.

2 保型超関数の例

序で述べたように, 正則 Siegel 保型形式の $Sym_n(\mathbb{R})$ への境界値として概均質ベクトル空間 (GL_n, Sym_n) の保型超関数が得られ, その L 関数は, Koecher-Maass ゼータ関数である. より一般に Tube 領域上の正則保型形式に対して Koecher-Maass ゼータ関数を考えることが, [2] においてなされている. この場合にも, 境界値を取ることにより, 前節の意味の保型超関数が得られ, Koecher-Maass ゼータ関数の関数等式を前節の結果の特殊な場合として得ることができる.

しかし, 前節の結果は, [1], [12] で実行されたような非正則な保型形式の Koecher-Maass ゼータ関数の取り扱いができるところにメリットがある. ここでは, [12] による実解析的 Eisenstein 級数の Fourier 係数から保型超関数を作り出すプロセスを, 抽象化した形で述べる.

ν, ν^* を $V_{\mathbb{Q}}$, $V_{\mathbb{Q}}^*$ 上の複素数値関数とする. L_1, L_2 を $V_{\mathbb{Q}}$ の格子とし, L_1^*, L_2^* で L_1, L_2 の双対格子を表わす. いま, ν, ν^*, L_1, L_2 について次の条件 (i), (ii), (iii) が成り立っているとしよう.

(i) ν は L_1-不変, ν^* は L_2^*-不変, すなわち,

$$\nu(x+\ell) = \nu(x), \quad \nu^*(y+\ell^*) = \nu^*(y) \quad (\ell \in L_1,\ \ell^* \in L_2^*)$$

が成り立つ. さらに, $G_{\mathbb{Q}}$ の数論的部分群 Γ で ν, ν^* を不変とするものがある, すなわち,

$$\nu(\rho(\gamma)x) = \nu(x), \quad \nu^*(\rho^*(\gamma)y) = \nu^*(y) \quad (\gamma \in \Gamma)$$

が成り立つ.

(ii) 無限級数

$$\sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/L_1} \nu(x), \qquad \sum_{y \in V_{\mathbb{Q}}^*/L_2^*} \nu^*(y)$$

は絶対収束する.

(iii) 任意の $x \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対し, $\nu^*(\phi(x)) = J(x)\nu(x)$ が成り立つ.

この 3 条件を満たす ν, ν^*, L_1, L_2 が与えられたとき, 格子 L_2, L_1^* 上の関数 $\alpha : L_2 \to \mathbb{C}$, $\beta : L_1^* \to \mathbb{C}$ を

$$\alpha(\ell) = v(L_2^*)^{-1} \sum_{y \in V_{\mathbb{Q}}^*/L_2^*} \nu^*(y)\mathbf{e}[-\langle y, \ell\rangle] \quad (\ell \in L_2),$$
$$\beta(\ell^*) = v(L_1)^{-1} \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/L_1} \nu(x)\mathbf{e}[\langle x, \ell^*\rangle] \quad (\ell^* \in L_1^*)$$

によって定義する. 右辺の級数は条件の (ii) により絶対収束する. これは, 実解析的 Siegel Eisenstein 級数の Fourier 係数を与える Siegel 級数（特異級数）の一般化（アブストラクトナンセンス化？）であり, **抽象 Siegel 級数**と呼ぶことにしよう. 次の補題が示すように, 抽象 Siegel 級数を Fourier 係数とすることによって保型超関数が得られる.

補題 4 緩増加超関数

$$T_\alpha^*(f^*) = \sum_{\ell \in L_2} \alpha(\ell)\mathcal{F}^* f^*(\ell), \quad T_\beta(f) = \sum_{\ell^* \in L_1^*} \beta(\ell^*)\mathcal{F}f(\ell^*) \quad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}),\ f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*))$$

は, 概均質ベクトル空間 (G, ρ, V), (G, ρ^*, V^*) 上の $J(x)$ を保型因子とする保型超関数を与える.

§1 の仮定 (A)–(D) をすべて満たす概均質ベクトル空間の例として,

Type (S): $(GL(n), 2\Lambda_1, Sym(n))$

Type (A): $(GL(n), \Lambda_2, Alt(n))$ $(n \equiv 0 \pmod 2)$

Type (M): $(GL(n) \times SL(n), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, M(n))$

を考えよう. これらの概均質ベクトル空間に対して, $\phi(x) = \operatorname{grad}\log P(x)$ は $\phi(x) = x^{-1}$ で与えられる. 任意の行列 $x \in V_{\mathbb{Q}}$ について, $d(x)$ で x の単因子の分母の積を表し,

$$\nu(x) = d(x)^{-k-\delta}, \quad \delta = \begin{cases} n+1 & (\text{Type (S)}), \\ n-1 & (\text{Type (A)}), \\ 2n & (\text{Type (M)}) \end{cases}$$

とおく. このとき, 明らかに

$$\nu(\gamma_1 x \gamma_2) = \nu(x+\ell) = \nu(x) \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in GL(n, \mathbb{Z}),\ \ell = V_{\mathbb{Z}})$$

が成り立ち, ν $(=\nu^*)$ は上の条件 (i) を満足する. また,

$$\frac{d(x^{-1})}{d(x)} = |\det x| \quad (\det x \neq 0),$$

であるから,

$$\nu(\phi(x)) = J(x)\nu(x), \quad J(x) = |\det x|^{-k-\delta}$$

となり, 条件 (iii) も満たされている. . 最後に, 無限級数

$$\sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/V_{\mathbb{Z}}} \nu(x)$$

は $\Re(k) > 0$ で収束する. これは, Type (S) の場合には良く知られている (例えば [4]) . また, Type (A) の場合には [13] で, Type (M) の場合には [8] でこの無限級数の明示式が与えられており, 収束の限界についても明らかになっている. したがって, 補題 4 を適用して保型超関数が得られる. これら 3 つの例において, 抽象 Siegel 級数は群

$$\text{Type (S)}:\ Sp(n), \quad \text{Type (A)}:\ SO(n,n), \quad \text{Type (M)}:\ GL(2n)$$

の Siegel 型の極大放物型部分群に関する (実解析的) Eisenstein 級数の Fourier 係数であり, 補題 4 が与える保型超関数に対応する L 関数はそれらの Eisenstein 級数の Koecher-Maass ゼータ関数というべきものとなっている.

抽象 Siegel 級数による保型超関数の構成は, [9] で調べられた非退化双対二次写像に付随するゼータ関数の関数等式の証明に利用できる. その中には, 概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない 4 次多項式に対して定義されるゼータ関数も含まれていて興味があるのだが, この点を説明することは別の機会に譲る.

References

[1] T.Arakawa, Dirichlet series related to the Eisenstein series on the Siegel upper half-plane, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **27**(1978), 29–42.

[2] T. Ibukiyama, Koecher-Maass series on tube domains, *Proceedings of the first autumn workshop on Number Theory*, 1–46, 1999.

[3] T. Kimura, *Introduction to Prehomogeneous Vector Spaces*, Amer. Math. Soc., 2003.

[4] Y. Kitaoka, Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms, *Nagoya Math. J.* **95**(1984), 73–84.

[5] H. Maass, *Siegel's modular forms and Dirichlet series*, Lect. Notes in Math. No.**216**, Springer, 1971.

[6] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **170**(2003), 1–31.

[7] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, *Tôhoku Math. J.* **34**(1982), 437–483.

[8] F. Sato, Fourier coefficients of Eisenstein series of GL_n, local densities of square matrices and subgroups of finite abelian groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **54**(2005), 33–48.

[9] F. Sato, Quadratic maps and non-prehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56**(2007), 163–184.

[10] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155.

[11] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogenous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[12] T.Suzuki, Distributions with automorphy and Dirichlet series, *Nagoya Math. J.* **73**(1979), 157–169.

[13] K. Tamura, Automorphic distributions of prehomogeneous vector spaces and their L-functions, Master Thesis (in Japanese), Rikkyo University, 2009.